

《微分几何》教学大纲

课程编码：110821

课程名称：微分几何

学时/学分：54/3

先修课程：《数学分析》、《高等代数》、《解析几何》、《微分方程》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：几何与代数教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质：本课程是数学与应用数学专业的专业基础课，是数学与应用数学专业学生的选修课。

2. 课程任务：通过学习本课程，一方面使学生学好作为数学基础的微分几何课，以便为以后进一步学习、研究现代几何学打好基础；另一方面培养学生理论联系实际和分析问题解决问题的能力。同时，《微分几何》的某些内容和方法，对于中学数学教学也具有指导意义，通过该课程的学习，为当好中学教师以及进一步提高奠定基础。

二、课程教学基本要求

本课程开设在第7学期，总学时为32学时，其中课堂讲授32学时，课堂实践0学时。

本课程学习的是经典微分几何的有关内容，主要通过微积分和线性代数的方法研究空间曲线和曲面的形状，找出决定曲线和曲面形状的不变量系统。在教学过程中要贯彻微分几何的思想和方法，使学生了解几何概念与方法，培养几何直观和图形想象能力，掌握几何量及其之间关系的具体计算和论证能力。本课程以经典微分几何为主，在教学上要求学生牢固掌握经典微分几何的内容。对部分整体微分几何的内容，如平面曲线的一些整体性质，完备曲面的Hopf-Rinow定理，极小曲面的Bernstein定理等，作了解性掌握的要求。

本课程的成绩考核方式为开卷考查。考试成绩由平时成绩和期终考试成绩组成，其中，平时成绩包括期中考试成绩、出勤、作业成绩、课堂提问、问题探讨（讨论）等。

三、教学内容

第一章 曲线论

1. 教学基本要求

本章主要研究内容为向量分析、曲线的切线、法平面、曲线的弧长参数表示、空间曲线的基本三棱形、曲率和挠率的概念和计算、曲线论的基本公式和基本定理，从而对空间曲线在一点邻近的形状进行研究，同时对特殊曲线特别是一般螺线和贝特朗曲线进行研究。通过本章的教学，使学生理解和熟记有关概念，掌握理论体系和思想方法，能够证明和计算有关问题。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

理解向量函数的极限、连续性、微商、泰勒(TayLor)公式和积分等概念,能推导和熟记有关公式,并能使用它们熟练地进行运算。了解这些内容与平行的数学分析内容之间的区别和联系。理解和熟记简单曲线、光滑曲线、曲线的切线和法面、曲线的弧长和曲线的自然参数等基本概念,能理解和熟记有关公式,并能使用它们熟练地进行运算。理解和熟记空间曲线的密切平面、基本三棱形、曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式等重要概念和理论。理解空间曲线论的基本定理。重点是掌握曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式等内容,能够论证和计算有关问题。

3. 教学重点和难点

教学重点是空间曲线在一点的基本向量、基本三棱形、伏雷内公式;曲率、挠率的定义和计算;一般螺线的定义和性质。教学难点是空间曲线论的基本定理的掌握。

4. 教学内容

第一节 向量函数

1. 向量代数复习
2. 向量函数的极限、连续性、微商泰勒

第二节 曲线的概念

1. 曲线的概念
2. 光滑曲线、曲线的正常点
3. 曲线的切线和法面
4. 曲线的弧长、自然参数

第三节 空间曲线

1. 空间曲线的密切平面
2. 空间曲线的基本三棱形
3. 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内公式
4. 空间曲线在一点邻近的结构
5. 空间曲线论的基本定理
6. 一般螺线

第二章 曲面论

1. 教学基本要求

本章主要研究曲面概念、曲线坐标网,曲面的切平面和法线;引入曲面的第一、第二基本形式,由第一基本形式计算曲面上曲线的弧长,曲面域的面积和曲面间的等距及保角变换;由第二基本形式讨论曲面上曲线的曲率、曲面的法曲率,曲面上的方向;曲面上的各种曲线和各种曲率之间的关系。介绍本章唯一的整体理论——高斯-波涅公式。

通过本章的教学，使学生理解和熟记有关概念，掌握理论体系和思想方法，能够证明和计算有关问题。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

理解和熟记简单曲面、光滑曲面、曲面上的曲线网、曲面的切平面和法线等基本概念，理解和熟记有关公式，并能使用它们熟练地进行运算。

理解和掌握曲面的第一基本形式，计算曲面上曲线的弧长、曲面域的面积和曲面间的等距及保角变换等有关问题。

理解和掌握曲面的第二基本形式，由第二基本形式讨论曲面上曲线的曲率、曲面的法曲率、曲面上的方向、曲面上的各种曲线和各种曲率之间的关系。

理解和掌握直纹面、特别是可展曲面的概念、理论、方法和应用背景。

初步认知张量符号，理解曲面论的基本定理。

理解和掌握曲面上曲线的测地曲率、测地线及其短程性。了解本章唯一的整体理论——高斯波涅（Gauss-Bonnet）公式。

了解常高斯曲率曲面、伪球面及罗氏几何的概念和有关内容。

3. 教学重点和难点

教学重点是空间曲面的第一、第二基本形式；法曲率、主曲率、高斯曲率、平均曲率、测地曲率的定义和性质；曲面的渐近方向、共轭方向、主方向；渐近线、曲率线、测地线的定义和求法；空间曲线、曲面的基本定理；可展曲面及其特征；欧拉公式、罗德里格定理、高斯定理、高斯一波涅公式及其应用。教学难点是曲面上各种曲率间的内部关系，曲面论的基本定理的理解及符号意义等。

4. 教学内容

第一节 曲面的概念

1. 简单曲面及其参数表示
2. 光滑曲面、曲面的切平面及法线
3. 曲面上的曲线族和曲线网

第二节 曲面的第一基本形式

1. 曲面的第一基本形式、曲面上曲线的弧长
2. 曲面上两方向的夹角
3. 正交曲线族和正交轨线
4. 曲面域的面积
5. 等距变换
6. 保角变换

第三节 曲面的第二基本形式

1. 曲面的第二基本形式

2. 曲面上曲线的曲率
3. 迪潘指标线
4. 曲面的渐进方向和共轭方向
5. 曲面的主方向和曲率线
6. 曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率
7. 曲面在一点邻近的结构
8. 高斯曲率几何意义

第四节 直纹面与可展区面

1. 直纹面
2. 可展曲面
3. 线汇

第五节 曲面论基本定理

1. 曲面的基本方程和克里斯托费尔符号
2. 曲面的黎曼曲率张量和高斯-科达奇-迈因纳尔迪公式
3. 曲面论基本定理

第六节 曲面上的测地线

1. 曲面上曲线的测地曲率
2. 测地线
3. 曲面上半侧地坐标网
4. 测地线的短程性
5. 高斯-波涅公式
6. 曲面上向量的平行移动

第七节 常高斯曲率的曲面

1. 常高斯曲率的曲面
2. 伪球面
3. 罗氏几何

四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	曲线论	18	
二	曲面论	36	
合计		54	

五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《微分几何》 主编: 梅向明、黄敬之 出版社: 高等教育出版社 出版或修订时间: 2008年。

(二) 参考书:

1. 《微分几何》 主编: 陈维桓 出版社: 北京大学出版社 出版或修订时间: 2006年。

2. 《微分几何讲义》 主编: 王幼宁、刘继志 出版社: 北京师范大学出版社 出版或修订时间: 2003年。

3. 《微分几何》 编者: 徐森林、纪永强、金亚东、胡自胜 出版社: 中国科技大学出版社 出版或修订时间: 2013年

执笔: 庄乐森

审定: 郭宏旻 梁桂珍