

《初等代数研究》教学大纲

课程编码: 110815

课程名称: 初等代数研究

学时/学分: 36/2

先修课程: 《数学分析》、《高等代数》、《解析几何》、《概率与数理统计》、《数学教学论》

适用专业: 数学与应用数学

开课教研室: 课程论教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质: 初等代数研究是数学与应用数学专业的一门专业必修课。从内容上讲, 这门学科既包含传统的代数, 又包含数学分析、近世代数、概率统计等数学分支, 是一门综合性的学科。它是在学生掌握了一定高等数学理论知识的基础上, 根据中学数学教学工作的实际需要而开设的。

2. 课程任务: 它的任务是运用现代数学和高等数学的观点从对初等代数的理论体系和解题方法进行剖析、整理和研究, 对学生已有的中学代数知识和技能起着复习巩固、查缺补漏和进一步充实提高的作用。通过本课程的教学, 使学生对中学数学教学所必需的初等代数的基础知识和理论体系有较深刻的理解、较系统的掌握, 能够运用现代数学观点审视中学代数问题, 能够从高等数学的背景解释中学代数问题, 具有熟练的分析和解决中学数学问题的基本能力, 为毕业后从事中学数学教学打下必要的基础。

二、课程教学基本要求

从初中数学的教学需要出发, 并根据中学数学的内容和知识结构, 把初等数学的一些基本问题分别组成若干专题, 在内容上适当延伸和充实, 在理论、观点和方法上予以提高。对各专题的教学, 都要着重基本思维方法的培养和基本技能技巧的训练。要求学生认清具体与抽象、特殊与一般、有限与无限等辩证关系, 培养学生的辩证唯物主义观点。在教学形式上以课堂讲授为主要教学环节。研制电子教案和多媒体幻灯片, 在教学方法和手段上采用现代教育技术。

1. 本课程开设在第 6 学期, 总学时 36, 其中课堂讲授 36 学时, 课堂实践 0 学时。

2. 本课程的成绩考核形式: 期终成绩 (闭卷考试) (70%) + 平时成绩 (平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等) (30%)。成绩评定采用百分制, 60 分为及格。

三、课程教学内容

第一章 自然数

1. 教学基本要求

掌握自然数的性质，了解基数理论下自然数性质的证明；掌握自然数的性质，了解序数理论下自然数性质的证明；了解数学归纳法的证明，掌握数学归纳法的实质和运用技巧，理解各种形式数学归纳法之间的联系。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解自然数、基数、皮亚诺公理系统、数学归纳法等基本概念，掌握自然数的基本性质及其证明方法、能够熟练掌握数学归纳法的实质和运用技巧。

3. 教学重点和难点

教学重点是自然数的性质，基数理论下自然数性质的证明；自然数的性质，序数理论下自然数性质的证明；数学归纳法的实质和运用技巧。教学难点是自然数的性质的证明、数学归纳法的运用技巧。

4. 教学内容

第一节 自然数的基数理论

1. 基数理论下的自然数的定义
2. 自然数的顺序律、运算律
3. 可数集的定义

第二节 自然数的序数理论

1. 公理法
2. 皮亚诺的自然数公理系统
3. 序数理论下自然数的顺序律、运算律

第三节 数学归纳法

1. 第一数学归纳法的原理及应用
2. 第二数学归纳法的原理及应用
3. 参变归纳法、反向归纳法的原理及应用

第二章 整数

1. 教学基本要求

掌握整数的性质，了解序偶理论下性质的证明；掌握带余除法的应用并能够灵活运用带余除法解决相关问题；了解最大公因数与最小公倍数性质的证明，掌握最大公因数与最小公倍数的性质，能灵活运用性质解决相关问题；灵活运用素数的性质解决相关问题；了解同余性质的证明，灵活运用同余的性质解决相关问题，了解欧拉函数的性质和运用。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解整数环、带余除法、最大公因数与最小公倍数、素数与

合数、同余等基本概念，掌握整数性质的证明方法，能够灵活运用整数的性质和原理解决相关问题。

3. 教学重点和难点

教学重点是整数的定义及其性质，带余除法的应用；最大公因数与最小公倍数的性质及运用性质解决相关问题；素数的性质解决相关问题。教学难点是整数理论及其性质的证明。

4. 教学内容

第一节 整数环

1. 代数系统的同构与扩张
2. 序偶的概念
3. 用序偶定义的整数及其运算、运算律

第二节 带余除法（自学）

1. 带余除法定理
2. 整数整除的性质
3. 奇数、偶数的概念与性质
4. 整数的 k 进制表示

第三节 最大公因数与最小公倍数（自学）

1. 辗转相除法
2. 公因数、公倍数的定义
3. 最大公因数、最小公倍数的定义及性质

第四节 素数与合数（自学）

1. 素数与合数的定义
2. 爱拉多塞筛法
3. 算数基本定理及其应用

第五节 同余（自学）

1. 整数同余的定义及性质
2. 剩余类、完全剩余系的定义及简单性质

第六节 欧拉函数（自学）

1. 简化剩余系
2. 欧拉函数的定义
3. 欧拉定理、费马定理及其应用

第三章 有理数

1. 教学基本要求

了解有理数性质的证明，掌握有理数域的性质；了解分数和循环小数互化的理论基础。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习,使学生能了解有理数性质的证明,掌握有理数域的性质;了解分数和循环小数互化的理论基础。

3. 教学重点和难点

教学重点是有理数的定义、有理数域的性质;分数和循环小数互化的理论基础。教学难点是有理数域性质的证明。

4. 教学内容

第一节 有理数域

1. 用整数的序偶定义有理数
2. 有理数的顺序律,运算及运算律

第二节 十进循环小数

1. 分数、既约分数
2. 有限小数、无限小数、无限循环小数
3. 分数与循环小数的互化

第四章 实数

1. 教学基本要求

了解无理数的存在性;了解性质的证明,掌握实数域的基本性质;了解实数的可开方性;了解一些常见的无理数;了解性质的证明,掌握 $[x]$ 的性质、灵活运用性质解决相关问题。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习,使学生能准确理解实数集、实数的基本性质、实数的四则运算、实数的开方、一些常见的无理数等基本概念,掌握 $[x]$ 的性质及其应用。

3. 教学重点和难点

教学重点是实数域的基本性质; $[x]$ 的性质,灵活运用性质解决相关问题。教学难点是实数域的基本性质的证明。

4. 教学内容

第一节 实数集

1. 阿基米德公理
2. 康托公理
3. 实数的定义

第二节 实数集的基本性质(自学)

实数的顺序性、连续性、不可数性

第三节 实数的四则运算(自学)

实数的四则运算

第四节 实数的开方（自学）

1. 实数的开方运算
2. 算术根

第五节 一些常见的无理数（自学）

几个常见的无理数及其性质

第六节 $[x]$ 及其应用（自学）

$[x]$ 及其应用

第五章 复数（自学）

1. 教学基本要求

了解性质的证明，掌握复数域的基本性质；了解从实数扩张到复数的合理性，灵活运用根的性质、几何性质、三角性质解决相关问题。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解复数域等基本概念，掌握复数的代数形式、复数的几何表示、复数的三角表示、复数的开方、复数模的性质。

3. 教学重点和难点

教学重点是复数域等基本概念，复数的代数形式、复数的几何表示、复数的三角表示、复数的开方、复数模的性质。教学难点是复数域的基本性质的证明。

4. 教学内容

第一节 复数域

1. 用实数的序偶定义复数
2. 复数的运算及运算律。

第二节 复数的代数形式

复数的代数形式

第三节 复数的几何表示

复数的几何表示

第四节 复数的三角表示

复数的三角表示

第五节 复数的开方

复数的开方

第六节 复数模的性质

复数模的性质

第六章 多项式

1. 教学基本要求

掌握多项式的定义及相关定义，掌握零多项式、多项式相等的定理，掌握用待定系数法求多项式，了解多元多项式定义及相关定理，了解有关多项式定理的证明；掌握常用的多项式乘法公式并能够灵活应用它进行多项式的恒等变形；掌握一元多项式分解的条件和分解方法，了解分解定理的证明。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解多项式等基本概念，熟练掌握多项式的恒等变形、多项式的因式分解等方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是多项式的定义及相关定义，零多项式、多项式相等的定理，用待定系数法求多项式；常用的多项式乘法公式并能够灵活应用它进行多项式的恒等变形；多项式分解的条件和分解方法。教学难点是社会心理学研究中的偏向和伦理问题。

4. 教学内容

第一节 多项式的一般概念

1. 多项式的定义
2. 多项式的恒等
3. 一元多项式
4. 多元多项式

第二节 多项式的恒等变形

多项式的恒等变形

第三节 多项式的因式分解

1. 一元多项式的因式分解
2. 多元多项式的因式分解

第七章 分式和根式

1. 教学基本要求

掌握分式的定义和分式的基本性质，掌握既约分式的存在性与唯一性，了解延拓原理及相关定理的证明；掌握将分式化为部分分式的方法，了解部分分式的相关定理，了解相关定理的证明；掌握根式的定义，并能灵活运用运算法则、运算公式进行化简、求值、证明。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确掌握分式的定义和分式的基本性质，掌握既约分式的存在性与唯一性，了解延拓原理及相关定理的证明；掌握将分式化为部分分式的方法，了解部

分分式的相关定理，了解相关定理的证明；掌握根式的定义，并能灵活运用运算法则、运算公式进行化简、求值、证明。

3. 教学重点和难点

教学重点是分式的定义和分式的基本性质，既约分式的存在性与唯一性；将分式化为部分分式的方法；根式的定义，并能灵活应用运算法则、运算公式进行化简、求值、证明。教学难点是将分式化为部分分式的方法。

4. 教学内容

第一节 有理分式

1. 有理分式的定义、分类、定义域、恒等、基本性质
2. 延拓原理

第二节 有理式的恒等变形

有理式的恒等变形

第三节 部分分式

1. 部分分式
2. 将有理真分式化为部分分式之和的方法

第四节 实数域上的根式

1. 算术根的定义
2. 算术根的计算
3. 根式的化简
4. 根式的运算

第八章 指数式与对数式

1. 教学基本要求

掌握指数的定义，掌握指数的性质并能灵活应用指数的性质进行化简、求值、证明，了解指数性质的证明；掌握对数的定义，掌握对数的性质并能灵活应用对数的性质进行化简、求值、证明，了解对数性质的证明。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解指数、对数等基本概念，掌握指数和对数的基本性质，能灵活运用指数、对数的性质进行化简、求值、证明。

3. 教学重点和难点

教学重点是指数的定义，指数的性质并能灵活应用指数的性质进行化简、求值、证明；对数的定义，对数的性质并能灵活应用对数的性质进行化简、求值、证明。教学难点是灵活应用指数、对数的性质进行化简、求值、证明。

4. 教学内容

第一节 指数式

1. 幂的概念的推广
2. 指数式的运算

第二节 对数式

1. 对数的定义
2. 自然对数
3. 对数式的恒等变形

第九章 三角式与反三角式

1. 教学基本要求

掌握三角式的解析定义，了解三角式解析定义的合理性；掌握三角式恒等变形的典型方法与技巧；掌握反三角式恒等变形的典型方法与技巧；掌握用指数式表示反三角式和用对数式表示反三角式在化简、求值、证明中的应用。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解三角式的解析定义等基本概念，掌握三角式、反三角式恒等变形的典型方法与技巧。

3. 教学重点和难点

教学重点是三角式的解析定义；三角式恒等变形的典型方法与技巧；用指数式表示反三角式和用对数式表示反三角式在化简、求值、证明中应用。教学难点是三角式恒等变形的典型方法与技巧。

4. 教学内容

第一节 三角式的概念

三角式的解析定义

第二节 三角式的恒等变形（自学）

三角式的恒等变形

第三节 反三角式的概念

1. 反三角式的定义
2. 反三角式的三角运算
3. 三角式的反三角运算

第四节 反三角式的恒等变形（自学）

反三角式的恒等变形。

第五节 欧拉公式（自学）

1. 用指数式表示三角式
2. 用对数式表示反三角式

第十章 初等函数

1. 教学基本要求

了解函数概念的发展过程，掌握中学函数定义的背景，掌握反函数的存在条件，掌握复合函数的条件和性质；掌握初等函数的定义及分类，了解初等函数公理化定义与证明；了解初等函数的超越性及超越性的证明；掌握初等函数定义域、值域的求法，函数极值、最值的求法；能判断函数的单调性奇偶性、周期性、连续性，并能证明；能利用函数的性质和关系作函数图像。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，能使学生准确了解函数概念的发展过程，掌握中学函数定义的背景，掌握反函数的存在条件，掌握复合函数的条件和性质；掌握初等函数的定义及分类，了解初等函数公理化定义与证明；了解初等函数的超越性及超越性的证明；掌握初等函数定义域、值域的求法，函数极值、最值的求法；能判断函数的单调性奇偶性、周期性、连续性，并能证明；能利用函数的性质和关系作函数图像。

3. 教学重点和难点

教学重点是中学函数定义的背景，反函数的存在条件，复合函数的条件和性质；初等函数的定义及分类，初等函数定义域值域的求法，函数极值、最值的求法；函数的单调性、奇偶性、周期性、连续性，并能证明；利用函数的性质和关系作函数圈象。教学难点是中学函数定义的背景，反函数的存在条件，复合函数的条件和性质。

4. 教学内容

第一节 函数的一般概念

1. 函数的定义
2. 逆函数的定义
3. 函数的收缩
4. 函数的复合

第二节 初等函数的分类

1. 初等函数的分类
2. 代数函数、超越函数
3. 基本初等函数的特征性质

第三节 初等超越函数的超越性

初等超越函数的超越性的证明

第四节 研究函数的初等方法

1. 求函数的定义域、值域、极值、最值
2. 确定函数的凸凹性
3. 利用变换绘制函数图像

第十一章 方程

1. 教学基本要求

掌握方程的概念，了解方程的分类；掌握方程的同解原理，并能对方程进行同解变形求解；能灵活运用三种变换求方程的解，能够用公式求解一元三次方程，能够对四类倒数方程求解，了解二项方程和参数方程的解法；掌握指数方程、对数方程、三角方程、幂函数方程、反三角方程的一般求解方法；掌握方程组的概念，了解方程组的同解原理，能利用消元法求解方程组；善于依据方程组的特点选择恰当的方法将多元方程转化为一元方程求解。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理方程、方程组等基本概念，掌握同解原理，并能对方程、方程组进行同解变形求解；能灵活运用三种变换求方程的解，能够用公式求解一元三次方程，能够对四类倒数方程求解，掌握指数方程、对数方程、三角方程、幂函数方程、反三角方程的一般求解方法；能利用消元法求解方程组；善于依据方程组的特点选择恰当的方法将多元方程转化为一元方程求解。

3. 教学重点和难点

教学重点是方程的概念，方程的同解原理，并能对方程进行同解变形求解；三种变换求方程的解，能够用公式求解一元三次方程，四类倒数方程的求解，了解二项方程和含参数方程的解法；指数方程、对数方程、三角方程、幂函数方程、反三角方程的一般求解方法；方程的概念，消元法求解方程组；多元方程转化为元方程求解。教学难点是利用三种变换求方程的解，四类倒数方程的求解。

4. 教学内容

第一节 方程的基本概念

方程的基本概念及其分类

第二节 一元方程的同解性

1. 一元方程的同解性
2. 一元方程同解变形的的方法

第三节 一元代数方程（特殊类型）的解法

1. 方程的变换
2. 一元三次方程的解法
3. 倒数方程的解法
4. 二项方程的解法

第四节 初等超越方程的解法举例（自学）

1. 超越方程的定义
2. 指数方程的解法

3. 对数方程的解法
4. 三角方程的解法
5. 反三角方程的解法

第五节 方程组的概念

1. 方程组的定义
2. 方程组的同解性
3. 消元法

第六节 特殊类型的方程组的解法举例（自学）

特殊类型的方程组的解法举例

第十二章 不等式

1. 教学基本要求

理解并能正确运用不等式；掌握不等式的常规方法，能运用非常规方法求解不等式；掌握证明不等式的主要方法（作差法、比较法、综合法、分析法、反证法、函数法、不等式法、数学归纳法等）；了解三个不等式的证明，能灵活应用三个不等式求最值和证明不等式；掌握利用凸函数定理和琴生不等式证明不等式的方法；掌握排序不等式证明不等式的方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能准确理解并能正确运用不等式；掌握不等式的常规方法，能运用非常规方法求解不等式；掌握证明不等式的主要方法（作差法、比较法、综合法、分析法、反证法、函数法、不等式法、数学归纳法等）；能灵活应用三个不等式求最值和证明不等式；掌握利用凸函数定理和琴生不等式证明不等式的方法；掌握排序不等式证明不等式的方法。。

3. 教学重点和难点

教学重点是解不等式的常规方法，运用非常规方法求解不等式；证明不等式的主要方法（作差法、比较法、综合法、分析法、反证法、函数法、不等式法、数学归纳法等）；应用三个不等式求最值和证明不等式；利用凸函数定理和琴生不等式证明不等式的方法；排序不等式证明不等式的方法。教学难点是运用非常规方法求解不等式。

4. 教学内容

第一节 不等式及其基本性质

1. 不等式的定义、分类
2. 不等式的性质

第二节 解不等式

1. 不等式的同解性定理
2. 各类不等式的解法

第三节 证明不等式

证明不等式的几种方法

第四节 几个重要的不等式

1. 算术平均与几何平均不等式
2. 伯努利不等式
3. 柯西不等式的证明及其应用

第五节 凸函数定理（自学）

琴生不等式的证明及其应用

第六节 排序定理（自学）

排序定理的证明及其应用

第十三章 排列与组合

1. 教学基本要求

掌握排列数公式，善于灵活运用图示法、分类法、特殊元素法、矩阵法、圆排列法解决排列问题；掌握组合数公式，善于灵活运用组合数公式计算和解决问题；掌握相异元素允许重复的排列与组合问题解决的一般方法；掌握不尽相异元素排列与组合问题解决的一般方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，使学生能掌握排列数公式，善于灵活运用图示法、分类法、特殊元素法、矩阵法、圆排列法解决排列问题；掌握组合数公式，善于灵活运用组合数公式计算和解决问题；掌握相异元素允许重复的排列与组合问题解决的一般方法；掌握不尽相异元素排列与组合问题解决的一般方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是排列数公式，运用图示法、分类法、特殊元素法、矩阵法、圆排列法解决排列问题；组合数公式，运用组合数公式计算和解决问题；相异元素允许重复的排列与组合问题解决的一般方法；不尽相异元素排列与组合问题解决的一般方法。教学难点是相异元素允许重复的排列与组合问题解决的一般方法；不尽相异元素排列与组合问题解决的一般方法。

4. 教学内容

第一节 相异元素不许重复的排列

相异元素不许重复的排列公式及应用

第二节 相异元素不许重复的组合

相异元素不许重复的组合公式及应用

第三节 相异元素允许重复的排列与组合（自学）

相异元素不许重复的组合公式及应用

第四节 不尽相异元素的排列与组合（自学）

不尽相异元素的排列与组合公式及应用

第十四章 数列

1. 教学基本要求

理解数列与集合的关系，掌握求数列通项的一般方法，能通过数列的通项探讨数列的性质；会求等差数列与等比数列通项，理解并熟练运用等差数列与等比数列性质解决相关问题；理解差分的概念，掌握 m 阶等差数列通项与求和公式得定理并能够熟练运用，了解定理的证明；理解线性递归数列的定义，了解线性递归数列通项的证明，能够数量运用特征方程求线性递归数列通项；掌握常见的转化方法（构造和式、差式、商式、积式）解决相关问题；理解母函数的概念，了解母函数的相关定理，掌握用母函数法求数列通项与前 n 项和的方法。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章学习，能使学生理解数列与集合的关系，掌握求数列通项的一般方法，能通过数列的通项探讨数列的性质；会求等差数列与等比数列通项，理解并熟练运用等差数列与等比数列性质解决相关问题；理解差分的概念，掌握 m 阶等差数列通项与求和公式得定理并能够熟练运用，掌握用母函数法求数列通项与前 n 项和的方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是求数列通项的一般方法；等差数列与等比数列通项，运用等差数列与等比数列性质解决相关问题； m 阶等差数列通项与求和公式的定理；运用特征方程求线性递归数列通项；常见的转化方法（构造和式、差式、商式、积式）解决相关问题；母函数法求数列通项与前 n 项和的方法。教学难点是 m 阶等差数列通项与求和公式的定理；运用特征方程求线性递归数列通项等。

4. 教学内容

第一节 序列及其分类

1. 序列的定义及分类
2. 数列的定义
3. 数列的通项公式
4. 数列的分类

第二节 等差数列与等比数列

等差数列与等比数列的定义及性质

第三节 数列的差分（自学）

数列的差分的定义及性质

第四节 线性递归数列（自学）

1. 递归数列

2. 递归方程
3. 线性递归数列及其性质

第五节 其它递归数列举例（自学）

其它递归数列举例

第六节 数列的母函数

数列的母函数的定义及其性质

四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	自然数	4	
二	整数	3	
三	有理数	2	
四	实数	2	
六	多项式	4	
七	分式与根式	4	
八	指数是与对数式	1	
九	三角式与反三角式	1	
十	初等函数	4	
十一	方程	4	
十二	不等式	3	
十三	排列与组合	2	
十四	数列	2	
合计		36	

五、主用教材及参考书

（一）主用教材：

《初等代数研究》（上、下册） 主编：余元希，田万海，毛宏德 出版社：高等教育出版社 出版时间：1988年。

（二）参考书：

1. 《中学代数研究与教学》 主编：李莉，李永杰 出版社：郑州大学出版社 出版时间：2007年。

2. 《中学代数研究》 主编：张奠宙，宋乃庆 出版社：高等教育出版社 出版时间：2006年。

3. 《初等数学研究》 主编：李长明，周焕山 出版社：高等教育出版社 出版时间：1995

年。

4. 《初等数学研究》主编：叶立军 出版社：华东师范大学出版社 出版时间：2008 年。

5. 《初等数学研究教程》主编：葛军，涂荣豹 出版社：江苏教育出版社 出版时间：2009 年。

执笔：皮 磊

审定：成继红 梁桂珍