

# 《微分几何》教学大纲

课程编码: 1511102502

课程名称: 微分几何

学时/学分: 32/2

先修课程: 《数学分析》、《高等代数》、《解析几何》、《微分方程》

适用专业: 数学与应用数学

开课教研室: 代数与几何教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质: 本课程是数学与应用数学专业的专业基础课, 是数学与应用数学专业学生的选修课。

2. 课程任务: 通过学习本课程, 一方面使学生学好作为数学基础的微分几何课, 以便为以后进一步学习、研究现代几何学打好基础; 另一方面培养学生理论联系实际和分析问题解决问题的能力。同时, 《微分几何》的某些内容和方法, 对于中学数学教学也具有指导意义, 通过该课程的学习, 为当好中学教师以及进一步提高奠定基础。

## 二、课程教学基本要求

本课程开设在第 7 学期, 总学时为 32 学时, 其中课堂讲授 32 学时, 课堂实践 0 学时。

本课程学习的是经典微分几何的有关内容, 主要通过微积分和线性代数的方法研究空间曲线和曲面的形状, 找出决定曲线和曲面形状的不变量系统。在教学过程中要贯彻微分几何的思想和方法, 使学生了解几何概念与方法, 培养几何直观和图形想象能力, 掌握几何量及其之间关系的具体计算和论证能力。本课程以经典微分几何为主, 在教学上要求学生牢固掌握经典微分几何的内容。对部分整体微分几何的内容, 如平面曲线的一些整体性质, 完备曲面的 Hopf-Rinow 定理, 极小曲面的 Bernstein 定理等, 作了解性掌握的要求。

本课程的成绩考核方式为开卷考查。考试成绩由平时成绩和期终考试成绩组成, 其中, 平时成绩包括期中考试成绩、出勤、作业成绩、课堂提问、问题探讨(讨论)等。

## 三、教学内容

### 第一章 曲线论

#### 1. 教学基本要求

本章主要研究内容为向量分析、曲线的切线、法平面、曲线的弧长参数表示、空间曲线的基本三棱形、曲率和挠率的概念和计算、曲线论的基本公式和基本定理, 从而对空间曲线在一点邻近的形状进行研究, 同时对特殊曲线特别是一般螺线和贝特朗曲线进行研究。通过

本章的教学,使学生理解和熟记有关概念,掌握理论体系和思想方法,能够证明和计算有关问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

理解向量函数的极限、连续性、微商、泰勒(TayLor)公式和积分等概念,能推导和熟记有关公式,并能使用它们熟练地进行运算。了解这些内容与平行的数学分析内容之间的区别和联系。理解和熟记简单曲线、光滑曲线、曲线的切线和法面、曲线的弧长和曲线的自然参数等基本概念,能理解和熟记有关公式,并能使用它们熟练地进行运算。理解和熟记空间曲线的密切平面、基本三棱形、曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式等重要概念和理论。理解空间曲线论的基本定理。重点是掌握曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式等内容,能够论证和计算有关问题。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是空间曲线在一点的基本向量、基本三棱形、伏雷内公式;曲率、挠率的定义和计算;一般螺线的定义和性质。教学难点是空间曲线论的基本定理的掌握。

## 4. 教学内容

### 第一节 向量函数

1. 向量代数复习
2. 向量函数的极限、连续性、微商泰勒

### 第二节 曲线的概念

1. 曲线的概念
2. 光滑曲线、曲线的正常点
3. 曲线的切线和法面
4. 曲线的弧长、自然参数

### 第三节 空间曲线

1. 空间曲线的密切平面
2. 空间曲线的基本三棱形
3. 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内公式
4. 空间曲线在一点邻近的结构
5. 空间曲线论的基本定理
6. 一般螺线

## 第二章 曲面论

### 1. 教学基本要求

本章主要研究曲面概念、曲线坐标网,曲面的切平面和法线;引入曲面的第一、第二基本形式,由第一基本形式计算曲面上曲线的弧长,曲面域的面积和曲面间的等距及保角变换;

由第二基本形式讨论曲面上曲线的曲率、曲面的法曲率，曲面上的方向；曲面上的各种曲线和各种曲率之间的关系。介绍本章唯一的整体理论——高斯-波涅公式。

通过本章的教学，使学生理解和熟记有关概念，掌握理论体系和思想方法，能够证明和计算有关问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

理解和熟记简单曲面、光滑曲面、曲面上的曲线网、曲面的切平面和法线等基本概念，理解和熟记有关公式，并能使用它们熟练地进行运算。

理解和掌握曲面的第一基本形式，计算曲面上曲线的弧长、曲面域的面积和曲面间的等距及保角变换等有关问题。

理解和掌握曲面的第二基本形式，由第二基本形式讨论曲面上曲线的曲率、曲面的法曲率、曲面上的方向、曲面上的各种曲线和各种曲率之间的关系。

理解和掌握直纹面、特别是可展曲面的概念、理论、方法和应用背景。

初步认知张量符号，理解曲面论的基本定理。

理解和掌握曲面上曲线的测地曲率、测地线及其短程性。了解本章唯一的整体理论——高斯波涅（Gauss-Bonnet）公式。

了解常高斯曲率曲面、伪球面及罗氏几何的概念和有关内容。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是空间曲面的第一、第二基本形式；法曲率、主曲率、高斯曲率、平均曲率、测地曲率的定义和性质；曲面的渐近方向、共轭方向、主方向；渐近线、曲率线、测地线的定义和求法；空间曲线、曲面的基本定理；可展曲面及其特征；欧拉公式、罗德里格定理、高斯定理、高斯一波涅公式及其应用。教学难点是曲面上各种曲率间的内部关系，曲面论的基本定理的理解及符号意义等。

## 4. 教学内容

### 第一节 曲面的概念

1. 简单曲面及其参数表示
2. 光滑曲面、曲面的切平面及法线
3. 曲面上的曲线族和曲线网

### 第二节 曲面的第一基本形式

1. 曲面的第一基本形式、曲面上曲线的弧长
2. 曲面上两方向的夹角
3. 正交曲线族和正交轨线
4. 曲面域的面积
5. 等距变换
6. 保角变换

### 第三节 曲面的第二基本形式

1. 曲面的第二基本形式
2. 曲面上曲线的曲率
3. 迪潘指标线
4. 曲面的渐进方向和共轭方向
5. 曲面的主方向和曲率线
6. 曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率
7. 曲面在一点邻近的结构
8. 高斯曲率几何意义

### 第四节 直纹面与可展曲面

1. 直纹面
2. 可展曲面
3. 线汇

### 第五节 曲面论基本定理

1. 曲面的基本方程和克里斯托费尔符号
2. 曲面的黎曼曲率张量和高斯-科达奇-迈因纳尔迪公式
3. 曲面论基本定理

### 第六节 曲面上的测地线

1. 曲面上曲线的测地曲率
2. 测地线
3. 曲面上半侧地坐标网
4. 测地线的短程性
5. 高斯-波涅公式
6. 曲面上向量的平行移动

### 第七节 常高斯曲率的曲面

1. 常高斯曲率的曲面
2. 伪球面
3. 罗氏几何

## 四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	曲线论	12	
二	曲面论	20	
合计		32	

## 五、主用教材及参考书

### (一) 主用教材:

《微分几何》 主编:梅向明、黄敬之 出版社:高等教育出版社 出版或修订时间:2008年。

### (二) 参考书:

1.《微分几何》 主编:陈维桓 出版社:北京大学出版社 出版或修订时间:2006年。

2.《微分几何讲义》 主编:王幼宁、刘继志 出版社:北京师范大学出版社 出版或修订时间:2003年。

3.《微分几何》 编者:徐森林、纪永强、金亚东、胡自胜 出版社:中国科技大学出版社 出版或修订时间:2013年

执笔:庄乐森

审定:郭宏旻 梁桂珍