

# 《高等代数选讲》教学大纲

课程编码：1511105003

课程名称：高等代数选讲

学时/学分：54/3

先修课程：《数学分析》、《高等代数》、《近世代数》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：代数与几何教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质：数学与应用数学专业的一门选修课程，是在学生学完高等代数等专业基础课程，已具备一定的代数知识基础之后开设的高等代数提高课程。

2. 课程任务：通过本课程的教学，使学生对高等代数的基本理论体系、高等代数的基本思想方法、高等代数的解题技巧有更全面、更深入地体会和准确地理解；能对问题的类型、解题思路和方法进行归纳、总结，探索解题规律，做到举一反三，触类旁通；进一步提高学生的数学修养、科学思维、逻辑推理能力，提高学生的理解和认识问题的能力以及计算能力。

## 二、课程教学基本要求

本课程要求学生牢固掌握多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换和欧氏空间等基础知识，使学生逐步熟悉空间、变换等现代数学中的重要思想方法。从而逐步提高学生抽象思维、逻辑推理和代数运算能力，培养学生的创新意识和创新能力。训练学生观察、分析、归纳、综合、抽象概括、逻辑推理和解决实际问题的能力。

成绩考核形式：考核方式为考查，考核成绩=平时成绩 $\times$ 30%+期终考试成绩 $\times$ 70%，其中，平时成绩包括期中考试成绩，出勤、作业成绩、课堂提问、问题探讨（讨论）等。

## 三、课程教学内容

### 第一章 多项式

#### 1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解多项式的定义，掌握最大公因式、互素、不可约多项式、因式分解等有关的一系列性质。

#### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生熟练掌握和应用带余除法定理；熟练掌握最大公因式和互素的判别方法和基本性质；熟练掌握和应用因式分解定理，掌握不可约多项式的基本性质，了解重因

式与重根的联系，掌握复系数与实系数的标准分解式。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是两个多项式作为形式多项式相等和作为多项式函数相等的定义及两者的等价；最大公因式和互素，因式分解定理和标准分解式，有理数域上的多项式。教学难点是多项式代数和多项式函数两个不同角度研究多项式的方法和联系，最大公因式、互素和不可约的一些解题方法和技巧。

### 4. 教学内容

- (1) 多项式的概念，带余除法
- (2) 因式分解
- (3) 整除与互素
- (4) 不可约多项式
- (5) 根，根与系数的关系等

## 第二章 行列式

### 1. 教学基本要求

通过本章学习，使学生熟练掌握计算行列式的三种方法：利用定义、利用性质、降阶，并会运用 Gramer 法则求线性方程组的解。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生理解行列式的归纳法定义，熟练掌握行列式的性质，熟练掌握计算行列式基本方法，并会运用 Gramer 法则求线性方程组的解，了解和应用 Laplace 定理，了解行列式的等价定义。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是行列式的性质，计算行列式的方法：累加法，降阶归纳法，典型形式行列式的计算方法。教学难点是 Laplace 定理的内容和意义。

### 4. 教学内容

- (1) 定义与性质，展开定理
- (2) 典型行列式
- (3) 行列式的各种计算方法
- (4) 特殊行列式的计算方法

## 第三章 线性方程组

### 1. 教学基本要求

通过本章学习，使学生熟练掌握线性方程组理论中的线性方程组有解的判定、解的结构及解法等理论及其解题方法和技巧，并运用这些方法解决相应的线性方程组问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生正确理解和掌握一般线性方程组、方程组的解、增广矩阵、线性方程组的初等变换等概念及性质。掌握阶梯形方程组的特征及作用；会求线性方程组的一般解。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是向量组的线性相关性理论；矩阵的秩；线性方程组有解判别定理及解的求法。教学难点向量组的线性相关性理论；线性方程组解的结构。

## 4. 教学内容

- (1) 线性方程组的初等变换
- (2) 向量的线性相关性，向量组的秩
- (3) 矩阵的秩，线性方程组有解的判别
- (4) 线性方程组解的结构

# 第四章 矩阵

## 1. 教学基本要求

通过本章学习，使学生熟练掌握矩阵理论中的矩阵的运算、分块矩阵、Binet-Cauchy 公式的应用、矩阵秩之间的关系、矩阵的分解等理论及其解题方法和技巧，并运用这些方法解决与矩阵有关的问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生正确掌握矩阵的运算和运算法则，熟练掌握矩阵的初等变换这一矩阵论的核心内容和方法，掌握方块矩阵的运算，特别是块初等变换，掌握矩阵的运算，初等变换，相抵关系的标准型的计算，掌握矩阵相抵的等价分类，化标准型的思想方法。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是矩阵乘法、矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系、可逆矩阵、伴随矩阵、 $n$  级方阵可逆的充要条件、分块矩阵的意义及运算、初等矩阵、用初等变换的方法求逆矩阵。教学难点是矩阵乘积的秩、矩阵的分块运算法及其规律。

## 4. 教学内容

- (1) 矩阵的分块；
- (2) 初等矩阵；
- (3) 矩阵的运算与矩阵的秩；
- (4) 逆矩阵；
- (5) 几种特殊矩阵。

# 第五章 二次型

## 1. 教学基本要求

通过本章学习,使学生理解二次型的标准形及正定二次型等理论及其解题方法和技巧,并运用这些方法解决与二次型有关的问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握用非退化线性替换化二次型为标准形和规范型,掌握判断二次型的正定性的方法,从对称矩阵的合同关系理解等价分类的思想。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是正定二次型。教学难点是实二次型的规范形的唯一性。

## 4. 教学内容

- (1) 矩阵的合同,二次型的分类;
- (2) 二次型的标准形;
- (3) 正定二次型;
- (4) 负定、半负定二次型。

# 第六章 线性空间

## 1. 教学基本要求

通过本章学习,使学生理解线性空间理论中的线性空间与子空间的性质、线性空间的维数与基、线性空间的同构及子空间的运算等理论及其解题方法和技巧,并运用这些方法解决与线性空间有关的问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生正确理解线性空间的定义,正确从定义出发判断和证明向量组的线性关系,把握一批重要实例(特别  $n$  维行向量空间)的基与维数,掌握计算矩阵的秩的初等变换方法和子式方法,掌握证明关于矩阵秩的题目方法,熟练掌握线性方程组的解的判断、计算方法和解的结构,培养学生严谨的逻辑推理能力和准确简明的表达能力,熟悉同构的思想、等价分类的思想、直和分解的思想。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是线性空间的定义,基、维数和坐标,基变换与坐标变换的关系,由向量组生成子空间及等价条件,子空间的交与和、维数公式、子空间的直和,线性空间同构,极大无关组的求法。教学难点是子空间的直和,线性空间的同构。

## 4. 教学内容

- (1) 线性空间的定义
- (2) 基底、维数、坐标
- (3) 子空间及其运算
- (4) 线性空间的分解,同构

# 第七章 线性变换

### 1. 教学基本要求

通过本章学习,使学生掌握线性变换的性质与运算、线性变换的值域与核、线性变换与矩阵、特征值与特征向量及不变子空间等理论及其解题方法和技巧,并运用这些方法解决与线性变换理论有关的问题。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生准确理解和掌握线性映射(变换)的概念,理解线性映射由基的像唯一确定及其应用;掌握两个线性空间之间的线性映射(变换)的全体在定义了加法、数乘(和乘法)运算后构成线性空间(代数);熟练掌握用核空间与像空间刻画单、满线性映射,熟练掌握维数公式;学会在同构意义下线性映射的命题与矩阵的命题之间的转化;学会以上内容在具体例子的实现和计算。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是线性变换在不同基下的矩阵的关系,矩阵的特征值、特征向量、特征多项式,哈密尔顿-凯莱定理,线性变换(矩阵)的对角化,不变子空间。教学难点是线性变换的值域与核,线性变换(矩阵)的对角化。

### 4. 教学内容

- (1) 线性映射与线性变换
- (2) 矩阵相似于对角阵的条件
- (3) 特征多项式与最小多项式
- (4) 值域、核、不变子空间

## 第八章 欧氏空间

### 1. 教学基本要求

通过本章学习,使学生掌握欧氏空间理论中的欧氏空间与内积、正交矩阵与正交变换、对称变换与实对称矩阵及正交补等理论及其解题方法和技巧,并运用这些方法解决与欧氏空间理论有关的问题。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握欧氏空间的度量概念与度量性质,掌握正交相似关系,掌握正交变换和正交矩阵的对应、对称变换与对称矩阵的对应,从矩阵的正交相似关系进一步熟练掌握等价分类的思想。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是施密特正交化过程及运算技巧;标准正交基在研究正交变换和对称变换方面的作用;正交矩阵的基本性质;实对称矩阵的相似标准形的建立过程;正交线性替换在化简实二次型上应用。教学难点是正交变换,对称变换,实对称矩阵的标准形。

### 4. 教学内容

- (1) 基本概念
- (2) 正交变换
- (3) 对称矩阵的标准形
- (4) 最小二乘法

#### 四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	多项式	6	
二	行列式	7	
三	线性方程组	6	
四	矩阵	9	
五	二次型	6	
六	线性空间	6	
七	线性变换	8	
八	欧氏空间	6	
合计		54	

#### 五、主用教材及参考书

(一) 主用教材：

《高等代数》主编：卢占化 出版社：河南师范大学 出版时间：2008 年。

(二) 参考书：

1. 《高等代数》主编：王萼芳 石生明 出版社：高等教育出版社 出版时间：2009 年。
2. 《高等代数选讲》主编：徐清舟 出版社：武汉大学出版社 出版时间：2011 年。
3. 《高等代数选讲》主编：郭育红 出版社：国防工业出版社 出版时间：2012 年。

执笔：李春燕

审定：郭宏旻 梁桂珍